Розбір задачі «Козак Вус і найкраща країна»

Помітимо, що країна утворює граф(міста — вершини, дороги — ребра). Для початку побудуємо мінімальне остове дерево цього графа, назвемо його MST. Правильна послідовність додавання ребер існує тоді і тільки тоді, коли сума цін усіх ребер MST менша або рівна за загальну кількість копійок у країні. Якщо сума цін ребер більша за загальну кількість, то твердження очевидно виконується(ми не можемо заплатити за побудову всіх ребер MST).

Покажемо, що якщо сума менша або рівна за загальну кількість, то в такому MST завжди існуватиме ребро, яке можна побудувати. Якщо б це було не так, то виконувалася би нерівність $w_i > c_{v_i} + c_{u_i}$(ціна ребра більша за суму кількостей копійок у вершинах, що воно з'єднує) для кожного ребра MST. А з цих нерівностей слідує, що сума цін усіх доріг більша за загальну кількість копійок($w_i, c_{v_i}, c_{u_i} > 0$), що суперечить умові.

MST, у якому додається ребро i ми перетворюємо на інший, де замість вершин v_i та u_i вже одна вершина з кількістю копійок рівною $c_{v_i} + c_{u_i} - w_i$, а також до неї проведені всі ребра інцидентні до вершин v_i та u_i. Така побудова по суті просто поєднує вершини сусіди у групи. При цьому різниця між сумою цін ребер MST та загальною кількістю копійок не змінилася, тому ми завжди зможемо знайти ребро, яке можна побудувати.

За допомогою цих умов досить легко написати рішення за O(N^2): будуємо MST, а потім $n - 1$ разів шукаємо ребро яке можна було б побудувати.

Для рішення за O(N) будемо шукати потрібну послідовність ребер за допомогою пошуку у глибину. Запускаємо dfs з будь-якої вершини графу. В dfs ми для кожної вершини v перебираємо сина вершини v, запускаємо dfs від сина, а потім намагаємося побудувати ребро між v і сином. Якщо ребро не можна будувати, ми додаємо до певного стека сина, і запам'ятовуємо для сина те ребро, яке його поєднує з v(батьком). Потрібно зазначити, що так як ребро не можна побудувати, то його побудова зменшує сумарну кількість монет групи. Після проходження всіх синів вершини v, ми робимо наступне: доки остання вершина s стеку лежить у піддереві вершини v і доки ми можемо об'єднувати s та v ми їх об'єднуємо і видаляємо s зі стеку(ми пам'ятаємо ребро, що веде від s до його батька, а усі вершини на шляху між v та s уже об'єднані з v через властивості стеку). Через те, що сума цін ребер менша або рівна за загальну кількість монет, після dfs-обходу всі $n - 1$ доріг будуть побудовані.