Розбір задачі «Труби»

1. Обмеження даного блоку дозволяли просто рекурсивно перебрати всі можливі повороти всіх труб, після чого перевірити систему на замкнутість. Для оптимізації перебору можна використати той факт, що для кутової труби є 4 варіанти повороту, а для прямої - всього 2, але навіть без них можна було набрати повний бал за блок.

   Складність: $O(4^{nm}nm)$.

2. Можна зауважати, що для утворення замкнутої системи труб потрібні мінімум 4 кутові труби. Отже, в даному блоці відповідь існує, якщо є рівно 4 кутові труби. Очевидно, якщо така замкнута система існує, то вона матиме форму прямокутника, і тоді задача зводиться до знаходження 4 кутів прямокутника, перевірки того, чи з'єднуються вони прямими трубами, і чи є на полі якісь зайві труби, що не входять до прямокутника.

   Складність: $O(nm)$.

3. Оскільки кількість кутів не перевищує 8, то ми можемо перебрати всі можливі повороти саме для кутових деталей. Тоді, для кожного стану кутових труб, ми зможемо або відновити фігуру, або сказати, що таке неможливо. Для цього потрібно кожну пряму трубу повернути так, щоб один з її кінців був приєднаним до кутової труби або до труби, для якої поворот вже відомий. Зауважимо, що якщо це робити за допомогою проходу по всьому полю, то ваш розв'язок не вкладеться в обмеження по часу. Щоб це виправити, потрібно робити пробіг тільки по тих фрагментах, де у вас знаходяться саме прямі труби, якщо відповідь існує, то їх буде O(n + m) штук.

   Складність: $O(4^c(n+m))$, де c — кількість кутових труб.

4. Якщо в цьому блоці відповідь існує, то є рівно три варіанти того, що може знаходитись в рядку:

   - обидва фрагменти не містять труб;
   - обидва фрагменти містять прямі труби;
   - обидва фрагменти містять кутові труби.

   В другому випадку труби повинні бути повернуті вертикально, а в третьому вони мають бути з'єднані між собою, а ті кінці, що залишились, мають обидва бути повернуті вгору або вниз, залежно від того, чи є в попередньому рядку відкриті кінці труб, направлені донизу, чи ні. Якщо на якомусь етапі неможливо закрити відкриті кінці труб в попередньому рядку або в останньому рядку залишились відкриті кінці труб, то тоді замкнутої системи не існує, в протилежному випадку вона вже побудована.

   Складність: $O(nm)$.

5. В цьому блоці якщо відповідь існує, то розв'язок складається з прямокутників, розташованих певним чином на полі. Отже, можна взяти розв'язок 2 блоку, адаптувавши його таким чином, щоб він розглядав одну клітинку рівно один раз, і отримаємо розв'язок цієї підзадачі з лінійною складністю.

   Складність: $O(nm)$.

6. Пробіжимось по всіх рядках, після чого для кожного стовпчика переберемо всі можливі варіанти поворотів труб у ньому, і оберемо такий, який не залишатиме відкритих труб (окрім, можливо, труб, направлених вниз). Якщо таких варіантів немає, чи наприкінці залишились відкриті труби, то відповіді не існує, в протилежному вона побудована.

   Складність: $O(4^m n)$.

7. Цей блок призначений для розв'язків, які правильні, але написані неоптимально, це може бути розв'язок з складністю $O(nm^2)$, $O(n^2m)$ чи якийсь оригінальний розв'язки, не передбачені автором.

8. Давайте проходитись по полю, починаючи з першого рядка, ітеруючись по кожному рядку зліва направо. Тоді якщо на кожній ітерації для чергової клітинки ми знаємо інформацію про існування відкритого кінця труби праворуч та вище від неї, то ми зможемо однозначно дізнатись поворот для цієї труби, або визначити, що такого не існує. Для клітинки (1, 1) ця інформація відома, отже, за мат. індукцією ця інформація буде відомою для всіх клітинок першого рядка. Отже, за індукцією, ми зможемо так зробити для всіх рядків. Додатково потрібно врахувати те, що останній рядок не має містити труб, у яких є відкриті кінці, направлені вниз.

   Складність: $O(nm)$.

Розбір задачі «Козак Вус та цукерки»

Перш за все, відсортуємо масив позицій, в яких лежать цукерки.

Якщо $n = 1$, то ми завжди можемо підібрати цю єдину цукерку, і відповідь 1.

Якщо $n = 2$, то ми можемо підібрати 2 цукерки лише тоді, коли вони не сусідні. Якщо ж цукерки сусідні, то відповідь 1. Таким чином ми вирішили **Блок 1**.

Якщо $n = 3$, то відповідь - принаймні 2, адже ми завжди зможемо підібрати принаймні першу та останню цукерку. Подивимось, за якої умови ми можемо підібрати всі 3 цукерки: маємо мати $(a_2 - a_1)\vdots x$, $(a_3 - a_2)\vdots x$ для деякого $x > 1$. Таке x знайдеться тоді й лише тоді, коли $HCD(a_2 - a_1, a_3 - a_2) > 1$. В цьому випадку відповідь 3, інакше - 2. Таким чином ми вирішили **Блок 2**.

Переведемо тепер задачу на математичну мову.

Для заданого масиву чисел потрібно знайти, для якої найбільшої кількості чисел з нього існує натуральне $x > 1$, при діленні на яке всі вони дають однакові остачі.

Подивимось, як можна вирішити задачу для даного x. Це можна зробити за $n \log n$, якщо замінити кожне число в масиві на його остачу за модулем x, відсортувати, і знайти найпоширенішу остачу двома вказівниками проходом по масиву.

Помітимо, що в якості x доцільно розглядати лише числа, що не перевищують максимального з a_i. Таким чином ми можемо вирішити **Блок 3**, вирішивши задачу окремо для кожного x з $2 \leqslant x \leqslant 10^2$, і взявши максимум по цим значенням.

Для **Блоку 4** помітимо, що ми можемо перебирати лише прості значення x (справді, якщо деякі числа дають однакові остачі при діленні на деяке складене число pq, то вони дають однакові остачі і при діленні на p, і при діленні на q). До 10^4 є порядку 10^3 простих чисел - асимптотика $O(10^3 n \log n)$ заходить.

Тепер помітимо, що при $x = 2$ відповідь гарантовано буде не меншою за $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Таким чином, в якості x нам потрібно перевірити лише прості p, відповідь для яких може бути більшою за $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Припустимо, що для деякого $p \neq 2$ є принаймні $\frac{n}{2}$ чисел, що дають при діленні на p однакову остачу.

Для **Блоку 5** тепер можемо скористатись наступною хитрістю: за такої умови має справджуватись $a_n \geqslant a_1 + p(\frac{n}{2} - 1) \geqslant p(\frac{n}{2} - 1)$. Таким чином, ми можемо вирішити задачу за $O(n \log n \pi(\frac{10^6}{n/2}))$, де $\pi(n)$ - кількість простих чисел, що не перевищують n.

Тепер перейдемо до **Блоку 6**

Припустимо, що для деякого $p \neq 2$ є принаймні $\frac{n}{2}$ чисел, що дають при діленні на p однакову остачу. Назвемо цю групу A. Виберемо з наших n чисел випадкову пару різних чисел. Імовірність того, що вони обидва потрапили в A не менша за $\frac{1}{4}$. Таким чином, пара не повністю потрапляє в A з імовірністю $\leqslant \frac{3}{4}$. Виберемо випадковим чином 50 пар. Імовірність того, що кожна не повністю потрапила в $A \leqslant (\frac{3}{4})^{50} \leqslant \frac{1}{10^6}$. Вірогідність дуже мала - можна вважати, що якась пара потрапила в A повністю.

Для кожної пари розглянемо всі прості дільники різниці чисел в парі. Об'єднаємо множини цих простих дільників по всім 50 парам. З імовірністю $\geqslant \frac{999999}{1000000}$ серед них буде шукане просте p. Тому можна перебрати лише прості дільники з цієї множини. Факторизацію можна провести за $50\sqrt{max(a_i)}$. Залишилося оцінити кількість різних простих дільників.

Якщо всі a_i не перевищуть A, то кожна різниця не перевищує A, а отже добуток 50 різниць не перевищує $A^5 0$. Тепер залишилось дізнатись, скільки максимум різних простих дільників може мати число порядка A^{50}. Підрахунки на комп'ютері показують, що при $A = 10^9$ це число буде порядка 180. Отже, ми можемо вирішити задачу для кожного простого числа окремо, отримавши асимптотику $O(50\sqrt{max(a_i)} + 180n\log n)$.

Розбір задачі «Кольорові книги»

Якщо всі кольори однакові, то неможливо посортувати, крім випадку, коли всі книги зразу правильно стоять.

Підзадача 1. Навчимось розв'язувати задачу за $3N$ операцій. Зробимо функцію, яка міняє місцями будь-які 2 книги. Якщо вони різного кольору, то просто за 1 операцію міняємо їх місцями. Якщо однакового, то зробимо 3 операції використовуючи ще одну книгу іншого кольору, ніж ці дві. Далі просто зліва направо виставляємо книги на свої місця.

Цей розв'язок можна оптимізувати до $2N$ операцій. Будемо виставляти книги на свої місця по черзі. Якщо нам потрібно поставити книгу на місце, а там стоїть книга такого ж кольору, то візьмемо книгу іншого кольору, яка ще не на своєму місці і за допомогою неї поставимо за 2 операції початкову на своє місце. Потрібно щоб завжди існувала книга іншого кольору, яка ще не на своєму місці. Для цього оберемо правильний порядок, в якому виставляти книги на свої місця. Як варіант, будемо ставити книги на свої місця так, щоб завжди існувала хоча б одна книга кожного кольору не на своєму місці. Коли вже кожного кольору залишиться по одному, доставимо їх. Можливо і далі оптимізувати цей розв'язок.

Підзадача 2. Розіб'ємо перестановку на цикли. Нехай спочатку є K циклів. За одну операцію можливо збільшити кількість циклів максимум на 1. Нам потрібно досягти стану, коли всі елементи лежать в окремих циклах. Якщо ми міняємо 2 книги, які лежать в одному циклі, то цей цикл розіб'ється на 2. Тому будемо міняти книги так, щоб кожного разу брати 2 елементи з одного циклу і за $N - K$ операцій вийде посортувати.

Підзадача 3. Розіб'ємо перестановки на цикли. Якщо в циклі довжини L є хоча б 2 різні кольори, то його можна розв'язати за L-1 операцію. Розв'язати означає поставити всі книги з цього циклу на свої місця. Для цього ми будемо виставляти по одному елементу на своє місце за одну операцію(це можна зробити, якщо 2 сусідні по циклу книги різного кольору). Але не можна, щоб залишились книги тільки одного кольору, для цього потрібно зафіксувати порядок схожий як в підзадачі 1.

Тепер залишились цикли, які складаються тільки з книг однакового кольору. Назвемо такі цикли поганими. Зауважимо, що якщо міняти місцями 2 елементи з різних циклів, то ці цикли об'єднуються. Зрозуміло, що кожен поганий цикл потрібно спочатку об'єднати з якимось іншим. Причому кількість об'єднань повинна бути мінімальна, бо кількість операцій буде рівна N -кількість_циклів+2*кількість_об'єднань. Ми можемо об'єднати 2 поганих цикли різних кольорів і тоді цей цикл стане хорошим. Тому нам вигідно розбити погані цикли на чимпобільше пар, де в кожній парі цикли різних кольорів. Нехай є C_i поганих циклів кольору і. Вигідно брати 2 максимальні C_i і з відповідних циклів утворювати пару. Цей розв'язок реалізовується за $O(NlogN)$.